A FÓRMULA ANDRADE. DOCUMENTO PARA O PROFESORADO (Guía e Respostas)

CONSIDERACIÓNS PREVIAS

As actividades que a continuación se propoñen están pensadas para alumnado de ESO. Algunhas delas, sen embargo, poderían ser resoltas, ás veces cun pouco de axuda do profesor ou profesora, por alumnado dos últimos cursos de primaria. O profesorado responsable poderá elixir aquelas que lle parezan máis axeitadas para as idades e características do grupo que realice a visita. no grupo de traballo de AGAPEMA somos conscientes de que o número de actividades é elevado para unha visita de unha hora, pero o obxectivo é proporcionar ao profesorado un amplo conxunto de actividades, que lles permita organizar a visita seleccionando as que considere máis axeitadas para o alumnado participante, e mesmo dividir ao alumnado en pequenos grupos durante a mesma.

Debido ás limitacións do espazo no que se atopa a escaleira resulta imprescindible que esta actividade se leve a cabo en grupos reducidos, non recomendándose que permanezan traballando simultaneamente nun mesmo lugar máis de 10-12 persoas. Se o grupo é moi numeroso, pódese combinar esta actividade con outras que ofrece o Museo.

Unha posibilidade para levar a cabo a visita sería a seguinte:

1) Facer unha breve presentación xeral da escaleira e de Domingo de Andrade ao grupo completo e realizar todos xuntos as actividades 1 e 2.
2) Dividirse en grupos pequenos (5-6 persoas) e que uns traballen as actividades relacionadas coas *Hélices e a Curvatura* (3 a 10) e outros as que teñen que ver coa *Superficie e o Volume* (11 a 16). Habería que tentar distribuír os grupos de xeito que traballen en espazos diferentes: uns nunha escaleira, outros noutra, outros a base das mesmas,...
3) Se algún dos grupos remata, pode intentar resolver algunha das actividades que se propoñen ao final como *Xogos Matemáticos*(17 a 20).
4) Posteriormente, xa na clase, poderíase facer unha posta en común dos aspectos traballados por cada un dos grupos para completar a visita.

Esta sería unha posibilidade para organizar a visita, pero o profesorado, en función do tempo dispoñible e das características propias do grupo, pode deseñar outros itinerarios. En todo caso recomendamos que o profesorado lea con atención o presente documento antes da chegada ao Museo.

Seguidamente presentamos unha copia do documento elaborado para o alumnado, no que se indican as solucións ás actividades propostas e algunhas indicacións (texto en azul) que, segundo a nosa consideración, poden ser de interese para o profesorado. Nalgunha das actividades, especialmente cando traballemos cos cursos máis baixos, pode ser necesaria algunha "pista" ou axuda para facilitar o traballo do alumnado.

Algunhas das tareas propostas implican a toma de medidas por parte do alumnado, polo que as solucións amosadas neste documento deberán entenderse como aproximadas, permitindo sempre unha certa marxe de erro sobre as mesmas.

A FÓRMULA ANDRADE. MATEMÁTICAS NA ESCALEIRA DE BONAVAL

O convento de San Domingos de Bonaval contén unha xoia arquitectónica e xeométrica: a tripla escaleira de caracol deseñada no século XVII polo arquitecto Domingo de Andrade. Trátase en realidade de tres escaleiras independentes, de forma semellante, que conforman un conxunto espectacular e inusual, conseguindo unha solución fermosa e brillante para resolver o problema de optimizar o acceso a todos os niveis nun espazo tan reducido como o cilindro que contén as escaleiras.

Domingo de Andrade (Cee, 1639 – Santiago de Compostela, 12-11-1712) foi un célebre arquitecto galego. Estudou Artes na Facultade de Artes da Universidade de Santiago de Compostela entre 1654 e 1656 coa intención de facerse clérigo. Completou os seus estudos en Salamanca ou quizá en Alcalá de Henares, onde adquiriu o título de licenciado. Foi Aparellador Maior da Catedral e en 1676 foi nomeado Mestre de Obras. Casou con Dª Isabel Areas de Canosa pero, ao quedar viúvo en 1700, acabou ordenándose sacerdote e solicitando unha praza no cabido da catedral compostelá, da que era mestre maior desde 1672. Morreu en Santiago e foi sepultado na Catedral.

Dentro das súas obras arquitectónicas destacan:

- A Torre do Reloxo ou da Berenguela na Catedral de Santiago.
- Diversas portadas do convento de San Domingo, rematando o claustro e realizando a famosa tripla escaleira helicoidal.
- A Sancristía da catedral, convertida logo en capela do Pilar, rematada polo seu discípulo Casas Novoa.

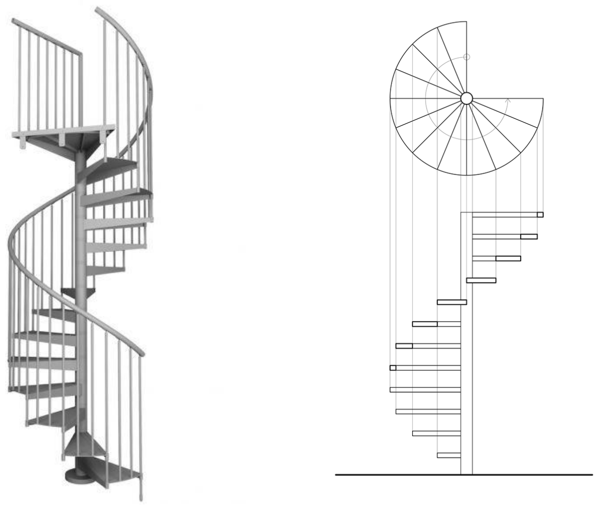
Entendemos necesaria unha breve introdución histórica para contextualizar as actividades posteriores. É importante salientar a excepcionalidade desta construción, tanto desde o punto de vista estético como práctico.

A ESCALEIRA DE BONAVAL. FORMA

As escaleiras que teñen esta forma coñécense comunmente como "de caracol", a pesar de que existe unha clara diferenza entre a curva que podemos observar nas cunchas destes moluscos e a que describen as escaleiras sobre os muros.

1. Como se chama a curva que se observa nas cunchas dos caracois? Que características comparte coa que describen as escaleiras? Cales son as principais diferenzas entre elas?
   A curva descrita nas cunchas de caracol son chamadas espirais logarítmicas ou tamén curvas de Fibonacci.
   A curvatura da escaleira de caracol é constante, é dicir o seu crecemento é sempre o mesmo.
   A curvatura da cuncha cambia, a razón de crecemento é $\underline{\Phi}$, é dicir o número de ouro.

As escaleiras de caracol adoitan estar apoiadas nunha columna que coincide co eixe arredor do que xiran, tal e como se amosa na seguinte imaxe:

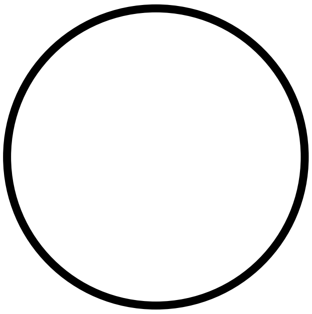


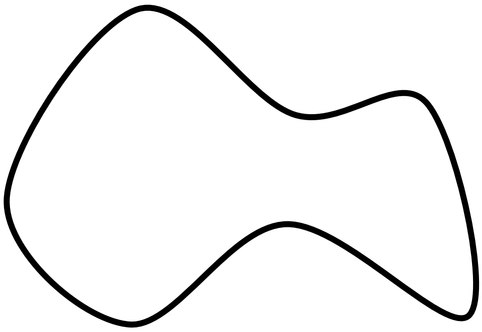
2. Observa as escaleiras de Bonaval e indica as diferenzas e as semellanzas coa que se amosa na imaxe. Onde están apoiadas as nosas escaleiras? Que vantaxes e inconvenientes pensas que ten esta característica?
   Nas escaleiras de Bonaval o apoio está na parede, non nun eixe central.
   A semellanza coa da nosa imaxe é que mantén a curvatura constante.
   As nosas escaleiras ao non ter un eixe central son mais abertas e permiten un espazo libre no centro. Esta pregunta é unha pregunta aberta, polo que pode haber máis respostas correctas.

HÉLICES. CURVATURA E OPTIMIZACIÓN

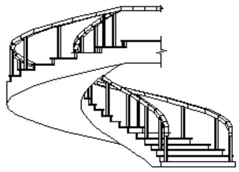
A elección da hélice como base para o deseño desta escaleira non é caprichosa, senón que obedece a dúas características matemáticas desta familia de curvas: teñen a curvatura constante e son as xeodésicas nun cilindro. De seguido explicamos a importancia de cada unha destas propiedades.

Para entender a idea de curvatura pensa que recorres unha curva nun coche que tes que dirixir, a curvatura cambia cada vez que moves o volante (a idea de curvas máis ou menos pechadas). Observa as seguintes curvas e contesta ás cuestións:

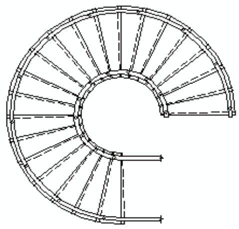




3. Cal das dúas curvas poderías percorrer sen mover o volante do coche? Por que? (Nese caso dise que a curva ten curvatura constante)
   A primeira
4. Poderías percorrer unha hélice (o pasamáns da escaleira) sen mover o volante?
   Si
5. Existen tres familias de curvas que teñen curvatura constante, investiga e atopa cales son.
   No plano: Circunferencias
   No espazo sobre un cilindro: Hélices
   Caso particular: A recta (neste caso a curvatura é nula)



O feito de que a escaleira teña a mesma curvatura en todo o seu percorrido non é algo irrelevante, pois supón que o xiro de cada chanzo é sempre o mesmo, posibilitando que todos eles teñan a mesma forma. Esta característica facilita moito a construción.



6. Cal é o ángulo que xira cada chanzo da escaleira? É o mesmo nas tres?

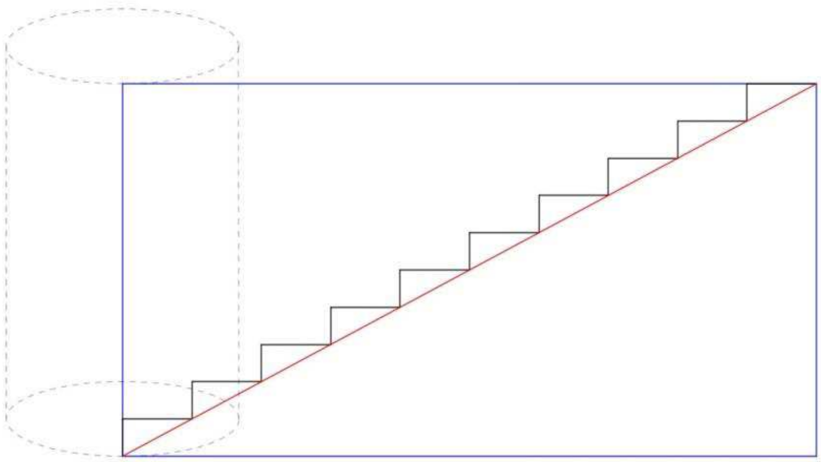
   Escaleira II e III teñen 45 chanzos e dan unha volta completa cada unha, entón o ángulo central é : 360º/45=8º

   É o mesmo nas tres escaleiras

7. Cal é o xiro total de cada unha das tres escaleiras?
   Escaleiras II e III dan unha volta completa, polo tanto 360º
   A escaleira I ten 82 chanzos, entón 82 x 8º = 656º= 1 volta completa e 296º, case dúas voltas

A segunda propiedade que nos interesa é a condición de xeodésica que ten esta curva. En matemáticas chamamos "xeodésica" á liña que une dous puntos dunha superficie empregando a menor distancia posible. Por exemplo, as liñas xeodésicas nun plano (pensa nun folio) son as liñas rectas.

Observa a seguinte imaxe e pensa no que lle pasa á diagonal do folio cando o enrolamos para construír un cilindro. En que tipo de curva se converterá?



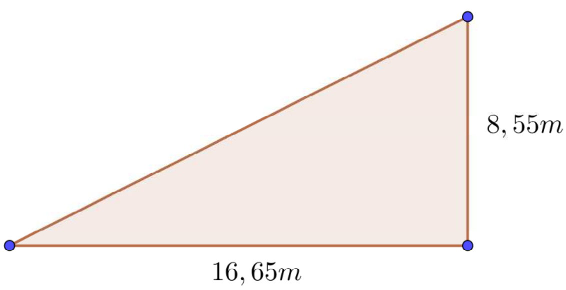
Convértese na nosa escaleira, unha hélice, e no noso caso concreto esta imaxe correspondería ás escaleiras II e III, que como comentabamos dan unha volta completa.

Deste xeito comprobamos que a hélice é o camiño máis curto para chegar dun punto a outro nun cilindro, é dicir, non é posible construír unha escaleira que leve dunha porta a outra empregando unha distancia menor. Esta característica indica que Domingo de Andrade non só tiña en mente facer unha obra de arte, senón que ademais resolveu o problema do acceso aos diferentes pisos dunha maneira óptima desde o punto de vista matemático.

8. Calcula a distancia percorrida polos pasamáns de cada escaleira que están pegados á parede.
   Para calcular a lonxitude deste pasamáns e tendo en conta o número de chanzos de cada unha e o que ten de alto cada chanzo, no noso caso sería:
   Altura aproximada de cada chanzo: 19 cm
   Escaleiras II e III: 45 chanzos x 19cm/chanzo= 855 cm =8,55 m de altura
   Escaleiras I: 82 chanzos x 19cm/chanzo= 1558 cm =15,58 m de altura

   Circunferencia exterior, Radio : 265 cm,
   entón base do triángulo: $2 \cdot \pi \cdot 265 = 1665\ cm$

A lonxitude do pasamáns é a hipotenusa do triángulo:



$$Lonxitude\ pasamáns = \sqrt{16{,}65^2 + 8{,}55^2} = 18{,}72\ m$$

Considerando que a escaleira I é 82/45 veces maior ca escaleira II e III, entón a lonxitude do seu pasamáns será:
82/45 x 18,72 m = 34,11 m

9. Calcula a distancia entre as diferentes portas que unen cada unha das escaleiras.
   Este problema resolveríase polo mesmo procedemento que o anterior, contando os chanzos que hai entre dúas portas consecutivas.
10. Cando a escaleira dá unha volta completa, que lonxitude leva percorrido o pasamáns da parede? A que altura estarías nese punto? Atopa a relación existente entre esas dúas medidas e a lonxitude da circunferencia da torre na que se atopa a escaleira.

    Altura aproximada de cada chanzo: 19 cm
    Escaleiras II e III: 45 chanzos x 19cm/chanzo= 855 cm =8,55 m
    A relación vén dada polo Teorema de Pitágoras.

SUPERFICIES E VOLUME

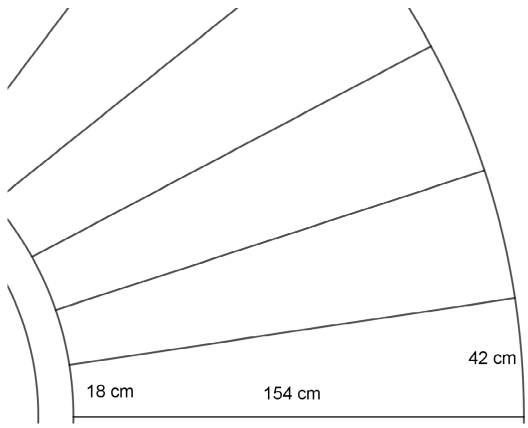
As propiedades anteriormente citadas permiten deducir que a forma de cada un dos chanzos é a mesma (salvo pequenas diferenzas case inapreciables, motivadas polo traballo dos canteiros). Neste capítulo analizaremos en detalle as formas e as dimensións deles e do conxunto.

11. Observa con detalle o conxunto da escaleira e clasifica, atendendo ao número de dimensións, na seguinte táboa as formas xeométricas que identifiques:

FORMAS UNIDIMENSIONAIS	FORMAS BIDIMENDIONAIS	FORMAS TRIDIMENSIONAIS

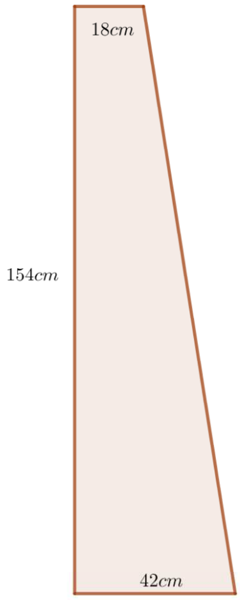
Trátase dunha pregunta aberta, para que o alumnado observe as diferentes formas xeométricas existentes no espazo da escaleira e clasifique as mesmas (rectángulos, prismas, cilindros, rectas, circunferencias,etc.)

12. Analiza a forma de cada chanzo e calcula, de xeito aproximado, a superficie sobre a que podemos pisar nun deles. Cal sería a superficie total sobre a que se pode pisar en cada escaleira?



Escaleira II ten 45 chanzos e da unha volta completa, entón o ángulo central é : 8º, por iso os lados largos de cada chanzos miden practicamente igual

Podemos calcular a superficie sobre a que podemos pisar como un trapecio, ou se se trata de cursos baixos coma un rectángulo no que consideraríamos a altura como a media de 42 e 18, é dicir 30 cm.



30cm x 154 cm= 4620 cm^2

Se pensamos coma un trapecio isósceles chegariamos ao mesmo resultado pois tomariamos como medidas aproximadas B=42 cm, b=18 cm e h=154. E polo tanto a área sería:
A= (42+18) x 154 / 2 = 4620 cm^2

Como todos son iguais, simplemente multiplicando polo número de chanzos, teriamos a superficie total sobre a que se pode pisar en cada escaleira.

Unha das características máis sorprendentes desta tripla escaleira é o feito de que non conta con ningún apoio máis que o muro que a contén. Esta circunstancia é moito máis salientable se un pensa no que pode pesar unha construción como esta. Tentaremos facer unha aproximación deste valor.

13. O primeiro que terás que facer e calcular o volume de cada un dos chanzos. Fíxate na súa forma e busca algún corpo dos que estudaches que sexa semellante. Na escaleira III tes unha porta onde se ve o que entra cada chanzo na parede, deste xeito será máis doado calcular un valor próximo ao real. Pódese simplificar a tarea calculando tan só o volume da parte "visible" dos chanzos, sen ter que medir o que entra na parede (esa actividade pode quedar como ampliación para a aula).

Podemos considerar que cada chanzo é a metade dun prisma con base o trapecio do que falabamos no apartado anterior e altura 19 cm. Polo tanto o volume de cada chanzo viría dado por:

V= Ab x h = (4620 x 19)/2 = 43890 cm^3

O volume total da escaleira I sería aproximadamente: 82 x 43890 = 3 598 980 cm^3

O volume de cada unha das escaleiras II e II sería aproximadamente: 45 x 43890 = 1975050 cm^3

14. Para calcular o peso deberás empregar o dato da densidade do granito, que é de 2,7 g/cm^3. Cal será o peso total das tres escaleiras? (Só temos en conta o peso dos chanzos na súa parte visible, non das outras partes das mesmas).

    (3598980 + 2 x 1975050) x 2,7 = 20 382 516 g = 20 382, 516 Kg (máis de 20 toneladas!)

Outra medida importante á hora de deseñar unha escaleira ou unha rampla é a pendente. Esta mide a relación entre o que subimos e o que avanzamos, polo que non depende só da altura de cada chanzo, senón tamén da súa profundidade, do que avanzamos. Nunha escaleira como esta, a profundidade dos chanzos é maior xunto á parede e moi pequena no outro extremo, polo que a pendente varía do exterior ao interior da mesma.

15. Tendo en conta as medidas obtidas en apartados anteriores, calcula a pendente dos pasamáns da escaleira, do exterior e do interior. Cal é maior? Será a pendente no medio das escaleiras igual á media das dos extremos? Comproba se esta hipótese é certa ou non.

    m_e= 8,55/16,65 = 0,51

    m_i = 8,55/6,97 = 1,23 (radio circunferencia interior 265-154=111)

    É maior a pendente do pasamáns interior.

    m_c = 8,55/ 11,81 = 0,72

    A hipótese non é certa.

16. Cal sería a pendente dunha escaleira recta que fose desde o centro da torre a unha das portas máis baixas?

    Se consideramos a porta que está a 7 escalóns... m = (0,19 x 7) / 2,65 = 0,50

Tería practicamente a mesma pendente que ten a escaleira pola parte exterior.

XOGANDO COAS MATEMÁTICAS NA ESCALEIRA DE ANDRADE

Unha vez que coñeces ben todas as características deste fermoso elemento arquitectónico, querémosche propoñer unhas actividades para realizar xunto cos teus compañeiros.

17. Fíxate na primeira porta á que chega unha das escaleiras (a que prefiras). Tendo en conta que podes subir en cada paso un ou dous chanzos, calcula cantas formas posibles hai de chegar ata esa porta.

    O número de formas de subir os 7 primeiros chanzos coincide co termo 8º da sucesión de Fibonacci (21 formas). Para comprobalo procederemos analizando o caso de que só haxa un chanzo, logo o de dous, o de tres... e comprobando como aumenta o número de posibilidades.

- Se só hai un chanzo (n = 1), existe unha única forma de subila, $C_1 = 1$
- Se hai dous chanzos, $C_2 = 2$: 1+1, 2
- Se hai tres chanzos,C_3=3: 1+ 1 +1, 1+ 2, 2 +1
- Se hai catro chanzos,C4 = 5: 1+1+1+1,1+2+1, 1+1+ 2, 2+1+1,2+ 2.
- Para cinco chanzos, C5 = 8: l+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 2+2+1, 2+1+2, 1+2+2.

  E así sucesivamente

18. Nunha celebración queremos colocar unha alfombra sobre as escaleiras de xeito que cada chanzo estea cuberto cunha das cores do arco da vella. Cal sería a cor do último chanzo en cada unha das tres?

    Tendo en conta que as cores do arco da vella son, por esta orde: vermello, laranxa, amarelo, verde, celeste, azul e violeta. Só temos que dividir o número de chanzos entre 7 e considerar o resto.

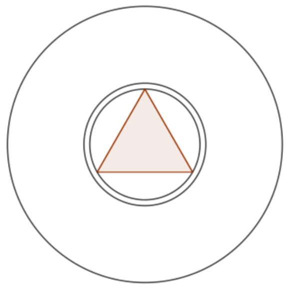
    82/7 -> Resto = 5 -> Celeste

    45/7 -> Resto = 3 -> Amarelo

19. As escaleiras están dentro dun cilindro, e bordean outro cilindro. Cal é o radio do cilindro máis exterior? Cal é o radio do cilindro máis interior?

    R_e = 265 cm

    R_i = 108 cm



20. Os tres puntos desde os que arranca a parte interior de cada escaleira forman un triángulo. Calcula as súas dimensións, indicando que tipo de triángulo é.
    É un triángulo equilátero de lado aproximadamente 184 cm.

Museo do Pobo Galego

AGAPEMA